УДК 622.69.4

Н. Притула
Центр математичного моделювання ІППММ
ім. Я.С.Підстригача НАН України,
ТзОВ ”Математичний центр”

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ЗАМІЩЕННЯ БУФЕРНОГО ГАЗУ АЗОТОМ У ПЛАСТАХ ГАЗОСХОВИЩА

Наведено математичну модель процесів фільтрації – дифузії в неоднорідних пластах – колектора підземного сховища газу із зосередженими джерелами. Поставлено загальну задачу на заміщення буферного газу азотом. Для різних варіантів заміщення буферного газу запропоновано алгоритми знаходження контуру поширення азоту.
Ключові слова: математична модель процесів фільтрація – дифузія, пласт-колектор, підземне сховище газу, буферний газ.

In this article a mathematical lumped parameters model of gas filtration – diffusion processes in heterogeneous reservoir beds of a gas underground storage facility is shown. The problem statement of substitution of cushion gas by nitrogen is made. Finding algorithms of a nitrogen distribution contour for different variants of substitution process of cushion gas is offered.
Keywords: a mathematical model of filtration – diffusion processes, a reservoir bed, a gas underground storage facility, cushion gas

Вступ

Розроблення чи вибір методу розв’язування задач про рух двокомпонентного газу в пластах визначається специфічними особливостями цих задач. На складність таких задач значно впливають неоднорідність об’єкта (пористого середовища) за багатьма параметрами, які часто змінюються стрибкоподібно, геометрія області течії, а також взаємозв’язаність багатьох фізичних процесів, які проходять у пористих середовищах. Математичний опис таких процесів, як правило, приводить до крайових задач із швидкозмінними розривними коефіцієнтами. Математична модель фільтрації газу в неоднорідних пластах є доволі складною. Її неможливо розв’язати аналітичними методами і тому більшість таких задач розв’язується числовим способом. Фільтрація двокомпонентного газу, який змішується в пористому середовищі, є типовим процесом конвекції-дифузії. Конвективні процеси в пористому процесі є на порядок інтенсивнішими ніж дифузні.

Газ у газосховищах умовно поділяють на дві частини, одна із яких називається буферним газом. Його роль є двоякою: слугувати пружиною при витисненні газу із сховища в процесі його відбору, а також протидіяти проникненню пластової води в пласт – колектор. Часто значні об’єми буферного газу знаходяться в слабопроникних частинах пласту – колектора. І в процесі відбору/закачування газу його присутність в сховищі слабо проявляється. За істотного росту цін на природний газ деяку частину буферного газу, з передбачуваним впливом на режими відбору /закачування газу, можна (а в багатьох випадках економічно доцільно) замінити на дешевший газ.

В різних типах газосховищ у разі заміщення природного буферного газу іншим газом чи рідиною проходитимуть певні фізичні процеси. Оцінювання їх впливу на процес заміщення вимагає проведення натурних та числових експериментів. Для цього потрібно розробляти математичні моделі процесів, які проходять в умовах заміщення. Вони дають змогу провести прогнозні розрахунки на значних інтервалах часу та відпрацювати технології заміщення, які б забезпечили контрольований вплив заміщення природного газу на існуючі режими відбору/закачування газу в ПСГ. Варіантів заміщення може бути декілька. Всі можливі варіанти заміщення, на основі моделювання і розроблених економічних оцінок, можна класифікувати за економічними та режимними критеріями, ступенем надійності, обґрунтованістю тощо.

Однією із основних проблем, які слід врахувати при моделюванні заміщення, є проблема змішування природного газу і азоту в процесі змінних напрямків та зміни швидкості фільтрації природного газу (режим відбору/закачування), а також в процесі їх взаємодифузії. Залежно від інтенсивності змішування може виявитися, що значний об'єм природного газу можна втратити, отже, заміна частини буферного газу азотом може виявитися економічно не виправданою. Інтенсивність процесів змішування газів для неоднорідних пластів значно залежить від інтенсивності закачування інертного газу, перетоків між різнорідними пластами газосховища природного газу, які пов'язані з існуючими режимами роботи ПСГ.

Для побудови ефективної системи моделювання розглянутих процесів, які б дали можливість оцінити можливі варіанти заміщення як за обсягами, так і за темпами заміщення потрібно провести: порівняльний аналіз газодинамічних характеристик азоту і природного газу; дослідження фільтраційних, дифузійних властивостей та розчинності азоту і природного газу в реальних умовах їх взаємодії між собою та з водою; дослідження динамічних параметрів взаємодії газу з поровими каналами пласту (вивчення факторів впливу на динаміку взаємодії); дослідження процесів змішування природного газу і азоту під час їх сумісної фільтрації; аналіз процесів взаємодифузії азоту, природного газу і води; дослідження процесів горіння природного газу з різною концентрацією азоту та впливу концентрації азоту в природному газі на теплотворну здатність суміші; моделювання процесу відбору-закачування природного газу з одночасним закачуванням азоту; планування режимів роботи ПСГ з частковим заміщенням буферного газу азотом і отримати оцінку його ефективності для конкретних пластів - колекторів.

Розв'язання згаданих і багатьох інших задач є неможливим без побудови достатньої точності динамічних математичних моделей наявних процесів та проведення їх аналізу. Сьогодні існує багато фундаментальних розробок [1–7], але далеко не всі основні процеси, які відбуваються під час заміщення буферного газу азотом, достатньою мірою є вивченими.

Ціллю роботи є побудова числового методу розв'язування задачі двокомпонентної ізотермічної фільтрації газів у неоднорідних пластах за проникністю, пористістю та потужністю.

1. Математична модель процесів фільтрація – дифузія

Змішування газів пов'язане з кількома факторами. Серед них основними вважаємо конвективну дифузію та анізотропію пласту. Оскільки швидкість руху точок контуру в напрямку нормалі є доволі незначною, то можемо вважати, що процес дифузії підпорядкований першому закону Фіка. наведемо основні припущення, які не повинні значно вплинути на результат розв'язування задачі.

За термо- та гідравлічними характеристиками природний газ і азот відрізняються незначно. Слід очікувати, що проникність у пористих середовищах цих газів відрізнятиметься також незначно. І тому задачі фільтрації двох газів можна об'єднати в одну фільтраційну задачу. Існуючі невизначеності, які стосуються основних фізичних, геометричних параметрів пласту, значно більше впливають на результат, ніж наведені припущення.

У такому випадку основна складність задачі в процесі її розв'язування полягатиме в знаходженні координат точок контуру - межі розділу газів у випадку їх незмішування або розподілу концентрації одного із них. Об'єми закачаного азоту розраховуються за рівнянням стану азоту. Коефіцієнт стисливості азоту за реальних пластових умов буде близьким до 0.97 (так, коефіцієнт стисливості азоту при 100 атм. і температурі 20 C^0 дорівнює 1.001).

1.1. Математична модель фільтрації газу. В області Ω в точках з координатами $\{x_i, y_i\}$, $i = 1,...,n$ задано значення тисків (пластові тиски у вибоях робочих та спостережних свердловин).

Розглянемо пласт як область Ω^*, товщина якої $h(x,y)$ значно менша від її інших геометричних розмірів. У зв'язку з цим вважатимемо цю область двовимірною Ω з контуром Γ. Декартову систему координат вибрано так, що вісь Oz скеровано вертикально вгору (протилежно до сил тяжіння). З області фільтрації виключаємо області навколо точок $\{x_i, y_i\}$ $i=1,...,n$, де знаходяться свердловини. Тому границя Γ складається з Γ_w ($i=1,...,n$) та Γ_z ($\Gamma=\Gamma_w \bigcup \Gamma_z$), а $\Gamma_w=\bigcup_{i=1}^{n}\Gamma_i$.

У процесі фільтрації тиск газу $p(x,y,t)$ визначається з рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{kh}{mz}\frac{\partial p^2}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{kh}{mz}\frac{\partial p^2}{\partial y}\right]=2a\,mh\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{z}\right]+2q(t)hp_0 \quad (1)$$

Рівняння (1) на границі Γ області Ω задовольняє крайові умови:
умову Діріхле на Γ_w

$$p(x_i,y_i)=p_i,\ \ (x_i,y_i)\in\Gamma_w; \qquad (2)$$

умову Неймана на Γ_2

$$\Phi p(x,y)=\frac{k\cdot h}{m\cdot z}\frac{\partial p}{\partial x}n_x+\frac{k\cdot h}{m\cdot z}\frac{\partial p}{\partial y}n_y=0,\ \ (x,y)\in\Gamma_2, \qquad (3)$$

де $n_x=\cos(n,x),\ n_y=\cos(n,y)$ — компоненти вектора $\mathbf{v}$ — зовнішньої нормалі до області $\Omega\subset R^2$; $k(x,y,p),m(x,y),h(x,y)$ — коефіцієнти проникності, пористості, газонасичена товщина пласта, відповідно; $q(t)$ — функція джерел; z — коефіцієнт стисливості; m — коефіцієнт динамічної в'язкості; p_0 — тиск повітря за атмосферних умов.

1.2 Математична модель дифузії газу. Знайти $C(x,y,t)$ - розподіл концентрації азоту в пористому середовищі, заповненому природним газом, який задовольняє рівняння

$$\frac{\partial C}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_x\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(D_y\frac{\partial C}{\partial y}\right)-\frac{\partial(v_xC)}{\partial x}-\frac{\partial(v_yC)}{\partial y}+U(x,y,C_0,t), \qquad (4)$$

де D_x,D_y ($D_i=D_{im}+D_{ik}(i=x,y)$) — компоненти вектора коефіцієнта молекулярної та конвективної дифузій, v_x,v_y — компоненти вектора швидкості фільтрації (конвективного перенесення) газу, $U(x,y,C_0,t)$ — відома функція зосереджених джерел азоту.

Як модуль вектора коефіцієнта молекулярної дифузій можна взяти відому формулу [7]

$$D_m=\frac{10^{-3}T^{1.75}}{P(n_A^{1/3}+n_G^{1/3})^2}\sqrt{\frac{1}{M_A}+\frac{1}{M_G}}, \qquad (5)$$

де T — абсолютна температура, P — тиск газу, n_A,n_G та M_A,M_G — мольні об'єми та мольні маси азоту і природного газу відповідно.

Рівняння (8) задовольняє крайову умову

$$\frac{\partial C}{\partial n_\Gamma}=0 \qquad (6)$$

відсутності азоту за межами зовнішнього контуру Γ пласта – колектора Ω. Вигляд функції зосереджених джерел для задачі (4)-(6) диктується задачею фільтрації (1)–(3) та представленням функції її джерел

$$U(x_i,y_i,C_0,t)=C_i(t)=d\left(x-x_i\right)\left(y-y_i\right)\left[h\left(t-t_{1i}\right)-\left(t-t_{2i}\right)\right],\ i=1,...,n.$$

Слід розглянути варіант постановки задачі (4)–(6) як задачі з рухомими межами (на рухомій межі $C=0$), що значно прискорить отримання результату. В цьому випадку дещо ускладниться метод пошуку розв'язку задачі.

2. Постановка задач

2.1. Задача ідентифікації [4]. Нехай пласт $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$ є об'єднанням n різних гідравлічно зв'язаних між собою пластів Ω_i.

3.2.1. На кожному пласті $\Omega_i \ (i = 1,...,n)$ розміщена хоча би одна свердловина заміру пластового тиску. В кожен момент часу t_j, який належить часовому інтервалу $t_j \in [0,t]$, маємо замір пластового тиску $p_{i_k}(t_j)$, де індекс i вказує на приналежність i_k-ї свердловини i-му пласту.

Знайти $\overline{p}_i(t_j)$ – середнє значення пластового тиску для кожного $\Omega_i \ (i = 1,...,n)$, а також динаміку газоперетоків між пластами і проникність міжпластових зон.

3.2.2. Нехай кожен пласт $\Omega_i \subset \Omega = \bigcup_{i=1}^{n} \Omega_i$ характеризується величинами k_i, m_i, h_i.

Знайти проникності k_i пластів $\Omega_i \ (i = 1,...,n)$ (два інші параметри вважаємо відомими) за умов збігу заміряних і розрахованих тисків у робочій зоні із наперед заданою точністю.

3.2.3. Для кожного пласту $\Omega_i \ (i = 1,...,n)$ за зміною середньопластових тисків $\overline{p}_i$ встановити $V_i = V_i(S_i, \overline{m}_i, \overline{h}_i, \overline{p}_i)$ – об'єм акумульованого газу і на основі цього уточнити середні параметри пластів, де $S_i, \overline{m}_i, \overline{h}_i, \overline{p}_i$ – площа поверхні Ω_i, середня пористість, потужність та тиск у пластах.

Слід зазначити, що не існує універсальних алгоритмів ідентифікації параметрів моделей пластів – колекторів. Це пов'язано із складною геологічною будовою пластів, неоднорідністю розподілу параметрів моделі в пласті, двомірністю його представлення, неможливістю повною мірою розподілити вплив параметрів на розподіл тиску, нерівномірністю розміщення свердловин як робочих, так і свердловин заміру тиску, неможливістю заміру витрати одночасно на всіх свердловинах і т.д.

2.2. Задача заміщення буферного газу (загальна постановка). Розглянемо дві множини свердловин I_s та I_w. Множина свердловин з індексом s – наявний фонд свердловин у блоках 1–3, а множина свердловин з індексом w – віртуальні свердловини (свердловини, які за потреби можна встановити в тих самих зонах).

Необхідно знайти для всіх можливих розбиттів множин свердловин $I_s = I_{sa} \cup I_{sn}$, $I_w = I_{wa} \cup I_{wn}$ такі, щоб об'ємні витрати $q_{sa}(t), q_{wa}(t)$ та $q_{sn}(t)$, $q_{wn}(t)$ (знаходження в індексі символу a означає, що цю множину свердловин використовуватимуть для закачування азоту, n – для відбору природного газу) та координати їх розміщення (x_i, y_i) $i \in [i_2 + 1, i_3]$ віртуальних свердловин, які б забезпечили $Q_n = \max \int (q_{sn}(t) + q_{wn}(t)) dt$ - максимальний відбір природного газу (максимальне заміщення азотом буферного газу) за умов:

– непотрапляння азоту в 4 – й блок на заданому інтервалі часу;

– оптимального поповнення буферного газу (таке поповнення буферного газу, яке б мінімізувало паливно-енергетичні затрати на режими роботи газосховища за декілька попередніх років).

2.3. ***Задача заміщення за умови незмішування азоту та природного газу***

а) є множина свердловин I_s. На інтервалі часу $[0,T]$ знайти такий режим закачування азоту $q_{ia}(t)$, який би забезпечив максимальний об'єм закачування азоту, непоширення азоту в область блоку 4 або потрапляння в цей же блок прогнозованого розподілу об'єму азоту в часі.

б) є множина свердловин I_s. Знайти режим відбору природного q_{sn} на інтервалі часу $[0,t_1]$, режим закачування азоту q_{ia} та інтервалі часу $[t_1,t_2]$ такі, щоб забезпечити за мінімальний інтервал часу $[0,t_2]$ максимальний відбір природного газу за умови відсутності впливу на поточні режими роботи газосховища (за заданих відборах/закачуванні природного газу пластові тиски в робочому блоці №4 залишалися тими самими, що і за відсутності заміщення буферного газу).

3. Варіанти заміщення буферного газу азотом

Заміщувати буферний газ азотом планують в процесі роботи газосховища. В зв'язку з цим наведемо постановки основних задач заміщення.

Пласт Ω подамо як об'єднання блоків $\Omega = \bigcup_{i=1}^{4} \Omega_i$ (див. рис.1). Введемо нумерацію свердловин: I_{r4} – множина робочих свердловин, $I_i \in I_{r4} \subset \Omega_4$, якщо $i = 1,...,n_1$; $I_s = I_{s1} \bigcup I_{s2} \bigcup I_{s3}$ – множина спостережних свердловин, $I_i \in I_s \subset \bigcup_{i=1}^{3} \Omega_i$, якщо $i = n_1 + 1,...,n_2$; I_w – множина віртуальних свердловин, якщо $I_i \in I_w \subset \bigcup_{i=1}^{3} \Omega_i$, то $i = n_2 + 1,...,n_3$.

Вважаємо, що кожна свердловина $I_i = I_i(x_i, y_i)$ ((x_i, y_i) – координати свердловини I_i і $(x_i, y_i) \in \Omega$) в кожен момент часу t має пластовий заміряний тиск $P_i(t)$ і $q_i^+(t)$, $q_i^-(t)$ – нагнітання або відбір газу, відповідно. На певних інтервалах часу нагнітання або відбір газу можуть бути нульовими.

Ефективне управління процесом заміщення частини буферного газу азотом можна проводити на основі результатів розрахунку контуру поширення азоту. На складність задач управління процесами заміщення впливають наявні невизначеності багатьох параметрів. Частково невизначеності ліквідовуються в процесі адаптації за окремими параметрами і в процесі заміщення інтегрально.

Оскільки процеси заміщення є доволі повільними, то в таких випадках турбулентність процесів повинна бути незначною, а процес змішування – незначним. Одним із способів заміщення може бути витіснення природного газу із слабопроникних пластів. Як показують числові експерименти, газ в робочій зоні під час інтенсивного закачування азоту в зони 1 і 2 може проявитися вже в кінці першого року. В цьому випадку іде поповнення буферного газу, що збільшить піковість роботи сховища, і частину газу можна відібрати просто з робочої зони.

Розглянемо варіант пошуку контуру поширення азоту за умов його змішування в процесі фільтрації, конвективного перенесення та конвективної та молекулярної дифузії. Для цього розглянемо одновимірне рівняння дифузії

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \tag{7}$$

де с – концентрація, D – сумарний коефіцієнт конвективної та молекулярної дифузії. Це рівняння має аналітичний розв'язок [Р.Ш. Малкович. Альтернативные аналитические решения уравнения диффузии для произвольного исходного распределения концетрации // ЖТФ. – 2002. – Т. 28. Вып. 21].

$$c(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ c_1 \left[erfc \frac{2rl + x}{2\sqrt{Dt}} - erfc \frac{2(k+1)l - x}{2\sqrt{Dt}} \right] + c_2 \left[erfc \frac{(2k+1)l - x}{2\sqrt{Dt}} - erfc \frac{(2k+1) + x}{2\sqrt{Dt}} \right] \right\}, \tag{8}$$

За таких умов $c(x,0) = 0$ $c(0,t) = c_1$ $c(l,t) = c_2$.

Цей розв'язок дає можливість оцінити віддаль проникнення азоту за заданий час. Його ми і приплюсуємо до зовнішньої нормалі в кожній точці контуру області поширення азоту за рахунок конвективного перенесення. Контуром конвективного перенесення вважатимемо контур, який отримується за алгоритмом, описаним вище, тільки за умов, що градієнт швидкості поширення є завжди напрямленим у зовнішню частину області поширення азоту. Якщо в процесі розрахунку градієнт швидкості поширення азоту є орієнтованим у внутрішню область, то в цьому випадку вважатимемо, що він дорівнює нулю, тобто точка контуру є нерухомою. В умовах існуючих невизначеностей такі припущення дадуть можливість оцінити максимально можливу область поширення азоту.

4. Алгоритм розрахунку координат контуру поширення азоту. Розрахунок контуру поширення азоту без змішування його з природним газом

Розглянемо неоднорідний пласт за проникністю, пористістю та потужністю. Вважаємо, що процес поширення азоту проходить без його змішування з природним газом, тобто розглядається роздільна фільтрація двох газів. Через деякі свердловини нагнітається азот, а через інші можливий відбір природного газу. Пласт – колектор за потужністю (різниця висотних позначок верхньої та нижньої поверхонь пласту) порівняно з іншими розмірами є незначним. Характерні віддалі в задачі – сотні і тисячі метрів, а часи – місяці і роки. В цих припущеннях відношення капілярного тиску до повної гідродинамічної втрати тиску є малим. Це дає змогу нехтувати капілярними силами. Рух газів підпорядкований закону Дарсі. Гравітаційні сили не враховуються.

Відбори (закачування) газу з підземних сховищ здійснюються через n свердловин, які розміщені в точках (x_i, y_i), протягом деякого проміжку часу $t \in [t_{1i}, t_{2i}]$, $(i = \overline{1,n})$. Густина відбору визначається формулою

$$q(t) = \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{I} q_i d\left(x - x_i\right)\left(y - y_i\right)\left[h\left(t - t_{1i}\right) - \left(t - t_{2i}\right)\right], (4) \tag{9}$$

де q_i – відбір газу з *i*-ї свердловини, $d(x)$ – дельта-функція Дірака, $h\left(t - t_{ji}\right)$ – одинична функція Хевісайда, V – об'єм газосховища.

Множина всіх свердловин S є об'єднання двох підмножин свердловин: S_1 та S_2. До множини S_1 входять робочі свердловини, а до множини S_2 – свердловини, через які проходить закачування азоту. У зв'язку із цим область пласта - колектора також розбивається на дві множини областей. В одній із множин областей є азот. В області поширення азоту справедливе рівняння стану для азоту

$$P = g r_a z_a R_a T, \tag{10}$$

а в зовнішній – рівняння стану для природного газу

$$P = g r z R T. \tag{11}$$

На межі азот – природний газ виконується умова рівності тисків, а також умова щодо об'єму газу у внутрішній області.

$$Q_\Sigma = \frac{T_{am}}{P_{am}}\int_0^F\int_0^h \frac{p\,m}{T\,z} dF\,dh \approx \frac{T_{cm}}{p_{cm}}\frac{\overline{p}}{\overline{T}\,\overline{z}}\overline{m}\,\overline{h}\,F, \tag{12}$$

де F – площа розміщення азоту.

Координати точок контуру знаходять так. На кожен момент часу знаходимо $\overline{v}(x,y,t)_{\overline{n}} = -\frac{k}{m_a}\frac{dp}{d\overline{n}}$, швидкість руху точок $(x,y) \in \Gamma_a$ контуру за градієнтом тиску вздовж нормалі $\overline{n}$ до контуру розмежування природного газу і суміші азоту з природним газом, де $\overline{n}$ – вектор швидкості фільтрації в напрямку нормалі в точці (x,y) на контурі Γ_a, k – коефіцієнт проникності, m_a – динамічна в'язкість азоту, p – приведений тиск. У процесі зміни довжини контуру густину точок $(x,y) \in \Gamma_a$ на контурі підтримуємо стабільною. Для прискорення часу розрахунку параметрів контуру густину точок на контурі можна нарощувати повільно.

Потрібно постійно контролювати дотримання з потрібною точністю рівності $V_a(t) = V_n(t)$. Тут позначено: $V_a(t)$ – об'єм газу, який знаходиться в $\Omega_a(t, \Gamma_a)$, а $V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i(t)$ – сумарний об'єм газу, який надійшов в пласт - колектор за час t через n нагнітальних свердловин. У випадку, якщо розрахований об'єм азоту за розрахованим контуром не дорівнює об'єму закачаного азоту (розраховується за параметрами зосереджених свердловин), то корегують швидкісті руху точок на контурі так, щоби досягти рівності (12) із заданою точністю.

Якщо корегування швидкості поширення на кожному часовому кроці буде значним, то його можна уточнювати

$$\bar{v}(x,y,t)_{\bar{n}_a} = \begin{cases} -\dfrac{k_a}{m_a}\dfrac{\Delta p_a}{\Delta \bar{n}_a} - \dfrac{k}{m}\dfrac{\Delta p}{\Delta \bar{n}}, \dfrac{\Delta p_a}{\Delta p} \geq 0 \\ -0.5\left(\dfrac{k_a}{m_a}\dfrac{\Delta p_a}{\Delta \bar{n}_a} - \dfrac{k}{m}\dfrac{\Delta p}{\Delta \bar{n}}\right), \dfrac{\Delta p_a}{\Delta p} \leq 0 \end{cases}, \qquad (13)$$

де перший доданок знаходиться у внутрішній (області знаходження азоту), а другий – у зовнішній області. За час Δt точка $(x, y) \in \Gamma_a$ в напрямку нормалі пройде шлях $\Delta t v(x, y, t + \Delta t)$.

Під час закачування азоту в декілька свердловин кількість незв'язних областей, заповнених азотом, постійно змінюється.

Висновки

У роботі запропоновано математичну модель та алгоритми різної складності знаходження контуру поширення азоту за умов незмішування та часткового змішування газів. Врахування дифузного змішування значно ускладнює алгоритми розв'язування задачі. Слід очікувати, що це не вплине істотно на швидкість поширення контуру області присутності азоту.

1. Вечерік Р.Л., П'янило Я.Д., Притула М.Г., Хаєцький Ю.Б. Математичний аналіз акумулюючої здатності газоносних пластів ПСГ // Нафтова і газова промисловість. – 2005.– № 6. – С. 55–59. 2. Лопух Н.Б., П'янило Я.Д., Притула М.Г., Притула Н.М. Розрахунок початково-граничних умов в задачах фільтрації газу в пористих середовищах // Вісник Нац. ун-ту "Львівська політехніка": Комп'ютерні науки та інформаційні технології. – 2009. – №638. – С. 239–243.