

© Я. Д. П'янило

д-р техн. наук

П. Г. Вавричук

Центр математичного моделювання

Інституту прикладних проблем

механіки і математики

ім. Я. С. Підстригача НАН України

## Дифузія газів у пористих середовищах із урахуванням конвективної складової

УДК 519.6:539.3

*У роботі досліджено процес заміщення газів у пористих середовищах із урахуванням конвективного руху одного з газів та залежності коефіцієнтів дифузії від тиску в них. Приведено формули для обчислення коефіцієнтів дифузії, які залежать від коефіцієнтів взаємодифузії газів та їх тиску. У результаті числового експерименту з'ясовано, що конвективна складова має суттєвий вплив на процес змішування газів.*

**Ключові слова:** пористе середовище, заміщення газів, дифузія, конвективна складова.

*В работе исследован процесс замещения газов в пористых средах с учетом конвективной составляющей одного из газов и зависимости коэффициентов диффузии от давления в них. Приведены формулы для вычисления коэффициентов диффузии, которые зависят от коэффициентов взаимодиффузии газов и их давления. В результате численного эксперимента выяснено, что конвективная составляющая оказывает существенное влияние на процесс смешивания газов.*

**Ключевые слова:** пористая среда, замещение газов, диффузия, конвективная составляющая.

*The paper examines the process of substitution of gases in porous media taking into account the convective motion of one of the gases and the dependence of the diffusion coefficients from their pressure. The formulas are presented for calculation of the diffusion coefficients that depend on the interdiffusion coefficients of gases and their pressure. As a result of numerical experiment it was found that the convective component has a significant influence on the process of mixing gases.*

**Key words:** gas replacing, porous media, diffusion convective component.

Дослідженням руху багатокомпонентного газу в пористих середовищах присвячено небагато робіт, що наперед пояснюється специфікою та складністю задач. Моделювання таких процесів, як правило, призводить до необхідності розв'язування нелінійних диференціальних рівнянь у частинних похідних або їх систем із змінними, зокрема розривними, коефіцієнтами за умов істотної невизначеності. Рух двокомпонентного газу, який змішується в пористому середовищі, є типовим процесом конвекції–дифузії. У процесі руху газу в пористому середовищі конвективна складова на порядок більша, ніж дифузійна. За малої конвективної швидкості та з огляду на процес змішування газів, потрібно враховувати одночасно процес конвекції–дифузії.

Дифузію двох газів без урахування конвективної складової описують диференціальними рівняннями

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( D \frac{\partial c}{\partial z} \right), \quad (1)$$

за заданих крайових умов, де параметр  $D$  означає коефіцієнт взаємної дифузії газів  $A$  та  $B$ . Для його визначення виведено чимало формул, зокрема [1]

$$D_{AB} = \frac{T^{1.5}}{p(\sigma_A + \sigma_B)^2} \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)^{0.5},$$

де  $p$ ,  $T$  – тиск та температура в системі,  $m_A$  та  $m_B$  – маси газів,  $\sigma_A$  та  $\sigma_B$  параметри потенціалів Ленард–Джонса.

Індійські математики Саксена М. та Саксена С. для обчислення коефіцієнта взаємної дифузії газів  $D_{AB}$  (см<sup>2</sup>/с) запропонували таку видозмінену формулу Сазерленда [1]:

$$D_{AB} = \frac{AT^{1.5} \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)^{0.5}}{p(V_A^{1/3} + V_B^{1/3}) [1 + (BT_{AB}/T)]},$$

де  $V_A$ ,  $V_B$ ,  $T_A$  та  $T_B$  – критичні об'єми (см<sup>3</sup>/моль) і температури (К) газів,  $p$  – тиск в атмосферах,  $T_{A,B} = (T_A T_B)^{0.5}$ . Для неполярних газів  $A=0,022023$  і  $B=1,1756$ , тоді як для систем, що складаються з комбінації полярних і неполярних газів,  $A=0,022023$  і  $B=1,90116$ .

Якщо відомі коефіцієнти самодифузії газів  $D_{AA}$  і  $D_{BB}$ , то

$$D_{AB} = \sqrt{\frac{m_A + m_B}{2\sqrt{m_A m_B}}} \sqrt{D_{AA} D_{BB}}.$$

Розглянемо циліндричне, рівномірно розподілене вздовж осі джерело нагнітання газу. Область пласта ПСГ моделюється циліндром, поділений циліндричними поверхнями на відповідні підобласті, заповнені різними газами або їх сумішшю (рис.1): зона I заповнена газом, що відбирається; зона II виникає унаслідок витіснення наявного газу газом, що нагнітається, у результаті якого защемлюється деяка частина пор; зона III заповнена газом, який нагнітається. Тоді рівняння для визначення розподілу тиску газу в кожній підобласті матиме вигляд [2,3]:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\tilde{D}}{p_0} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (2)$$

де  $r$  – радіус-вектор, проведений із центра свердловини, за Лейбеноном:

$$\tau = \frac{p_2}{p_0} t + \left( 1 - \frac{p_2}{p_0} \right) \frac{1 - e^{-\beta r}}{\beta}, \quad \tilde{D} = \frac{m\mu}{k}, \quad \beta = \frac{p_0 k \lambda_m^2}{2m\mu}.$$

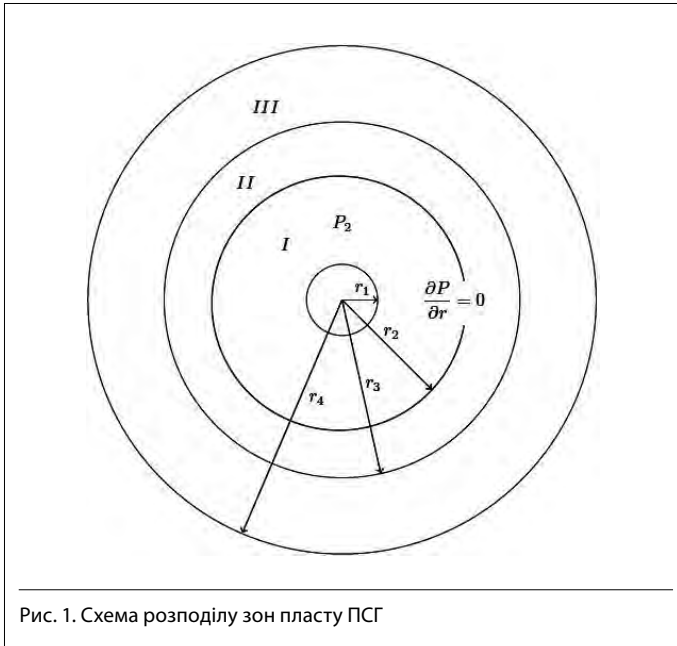


Рис. 1. Схема розподілу зон пласту ПСГ

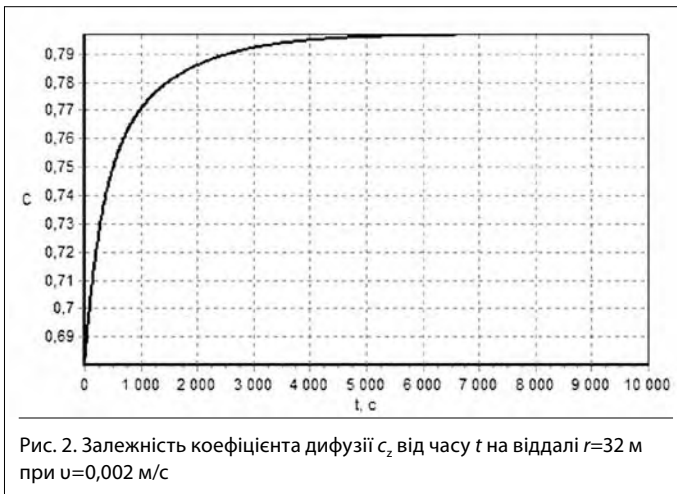


Рис. 2. Залежність коефіцієнта дифузії  $c_2$  від часу  $t$  на віддалі  $r=32$  м при  $u=0,002$  м/с

Тут  $p_0$  та  $p_2$  – початкове значення тиску та значення тиску на границі області відповідно. Розв’язок рівняння (2) за постійних крайових умов подано в роботах [2–4].

Якщо розподіл тиску відомо, то швидкість руху газу визначається за формулою

$$v = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3)$$

Тут  $\mu$  – абсолютна в’язкість газу,  $k$  – проникність пласта, зайнятого газом. Рівняння (1) має місце в другій зоні лише тоді, коли її границі не зміщуються. В іншому випадку необхідно враховувати швидкість руху границь. Під час витіснення одного газу іншим процес дифузії необхідно розглядати з урахуванням конвективної складової, тобто швидкості руху першої зони. Тоді задача зводиться до розв’язування рівняння дифузії з конвективною складовою

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + v \frac{\partial c}{\partial r} = D \left( \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right)$$

за відповідних крайових умов. Тут  $v$  – швидкість руху газу в першій зоні, яка визначається з формули (3). Для числового аналізу впливу конвективної складової на процес дифузії розглянуто простішу модель, а саме дифузію газу в шарі завтовшки  $l$ , описану рівнянням

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + v \frac{\partial c}{\partial r} = D \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \quad (4)$$

за відповідних крайових умов, які запишемо у вигляді  $c_1(r)=c(r, 0)$ ,  $c_2(r)=c(r, l)$ ,  $c_3(t)=c(0, t)$ .

Для узгодженості умов необхідно виконання рівності  $c_1(0)=c_3(0)$ .

Розв’язок рівняння (4) будемо шукати з використанням перетворення Лапласа. За сталих коефіцієнтів рівняння (4) матиме вигляд:

$$\bar{c}'' - b\bar{c}' - p_1\bar{c} = -c_{11} \quad (5)$$

Тут  $b=v/D$ ,  $p_1=s/D$ ,  $c_{11}=c(r, 0)/D$ . Будемо вважати, що параметри  $b$  та  $p_1$  є постійними. Загальний розв’язок однорідного рівняння матиме вигляд:

$$\bar{c}_z = A e^{\lambda_1 r} + B e^{-\lambda_2 r},$$

де

$$\lambda_1 = \lambda_{11} - \lambda_{12}, \quad \lambda_2 = \lambda_{11} + \lambda_{12}, \quad \lambda_{11} = \frac{v}{2D}, \quad \lambda_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{v}{D}\right)^2 + \frac{4s}{D}}$$

Часткове розв’язання диференціального рівняння (5) залежить від його правої частини, зокрема, метод варіації сталих призводить до співвідношення:

$$\bar{c}_{ch} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \left( e^{\lambda_1 r} \int c_{11} e^{-\lambda_1 y} dy + e^{-\lambda_2 r} \int c_{11} e^{-\lambda_2 y} dy \right).$$

Якщо функція  $c_{11}$  тотожно стала, то частковий розв’язок  $\bar{c}_{ch} = -c_{11}/\lambda_1 \lambda_2$ . За сталих крайових умов загальний розв’язок задачі буде

$$\bar{c}_z = -\frac{c_{11}}{\lambda_1 \lambda_2} + c_{31} e^{\lambda_{11} r} \frac{sh \lambda_{12} (l-r)}{sh \lambda_{12} l} + c_{21} e^{\lambda_{11} (l-r)} \frac{sh \lambda_{12} r}{sh \lambda_{12} l}.$$

В останній рівності позначено

$$c_{31} = \bar{c}(0, s) + \frac{c_{11}}{\lambda_1 \lambda_2}, \quad c_{21} = \bar{c}(l, s) + \frac{c_{11}}{\lambda_1 \lambda_2}.$$

Загальний розв’язок у зображеннях Лапласа має такий вигляд:

$$\bar{c}_z = \frac{c_1}{s} + (c_3 - c_1) \frac{1}{s} e^{\lambda_{11} r} \frac{sh \lambda_{12} (l-r)}{sh \lambda_{12} l} + (c_2 - c_1) \frac{1}{s} e^{\lambda_{11} (l-r)} \frac{sh \lambda_{12} r}{sh \lambda_{12} l}.$$

Позначимо  $\Phi(a, b, s) = \frac{l \, shaq}{s \, shbq}$ .

Тоді

$$\bar{c}_z = \frac{c_1}{s} + (c_3 - c_1) e^{\lambda_{11} r} \Phi(l-r, l, s) + (c_2 - c_1) e^{\lambda_{11} (l-r)} \Phi(r, l, s).$$

Таблиця 1

Значення коефіцієнта дифузії для різних значень часів  $t$  та координати  $r$  при  $u=0,002$  м/с та  $T=10\,000$  К

$t/r$	0	8	16	24	32	40
0		0,3728	0,5591	0,6508	0,6800	
2500	0,6	0,5582	0,6136	0,6966	0,7897	
5000		0,5688	0,6280	0,7087	0,7960	0,9
7500		0,5702	0,6299	0,7103	0,7968	
10000		0,5704	0,6302	0,7105	0,7969	

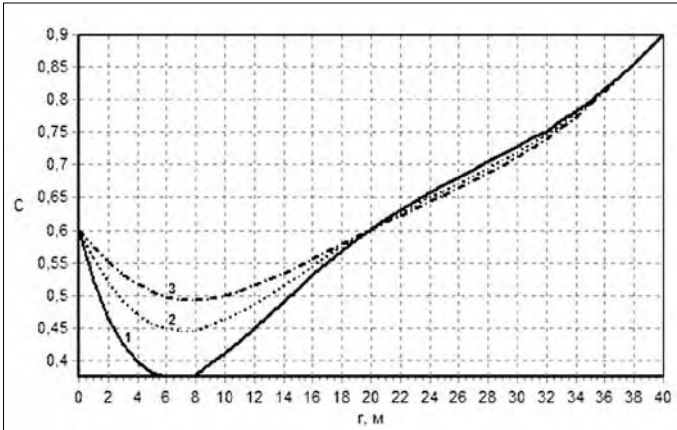


Рис. 3. Залежність коефіцієнта дифузії  $c_z$  від віддалі для часу  $t=400$  с та різних значень конвективної швидкості  $u=\{0,004; 0,003; 0,002\}$  м/с, де крива 1 відповідає швидкості  $u=0,004$  м/с, крива 2 –  $u=0,003$  м/с, крива 3 –  $u=0,002$  м/с

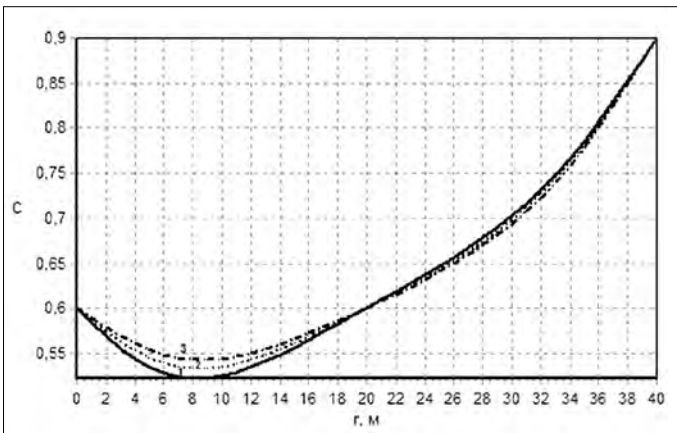


Рис. 4. Залежність коефіцієнта дифузії  $c_z$  від віддалі для часу  $t=400$  с та різних значень конвективної швидкості  $u=\{0,001; 0,0005; 0\}$  м/с, де крива 1 відповідає швидкості  $u=0,001$  м/с, крива 2 –  $u=0,0005$  м/с, крива 3 –  $u=0$  м/с

Оригінал зображення  $\Phi(a, b, s)$  будемо шукати шляхом розкладу його на прості дроби

$$\Phi(a, b, s) = \frac{1}{s} \frac{shaq}{shbq} = \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi a}{b} \frac{q^2}{q^2 + \left(\frac{k\pi}{b}\right)^2}$$

Оскільки

$$q^2 = s + \frac{v^2}{4D}, \quad b = l/\sqrt{D}, \quad a = \{(l-r)/\sqrt{D}, r/\sqrt{D}\},$$

$$a/b = \{(l-r)/l, r/l\},$$

то оригіналом зображення

$$\frac{1}{s} \frac{q^2}{q^2 + (k\pi/b)^2} = \frac{1}{s} \frac{s + \lambda_{13}^2}{s + \lambda_{ir}^2},$$

де  $\lambda_{ir}^2 = \lambda_{13}^2 + (k\pi/b)^2$ ,  $\lambda_{13} = v/2\sqrt{D}$ , є функція

$$e^{-\lambda_{ir}^2 t} + \lambda_{13}^2 \frac{1 - e^{-\lambda_{ir}^2 t}}{\lambda_{ir}^2} = e^{-\lambda_{13}^2 t} + \frac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{ir}^2} (1 - e^{-\lambda_{ir}^2 t})$$

Тоді

$$\varphi(a, b, t) = \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \sin \frac{k\pi a}{b} \left( e^{-\lambda_{ir}^2 t} + \frac{\lambda_{13}^2}{\lambda_{ir}^2} (1 - e^{-\lambda_{ir}^2 t}) \right)$$

та остаточно

$$c_z = c_1 + (c_3 - c_1)e^{\lambda_{13} r} \varphi(l-r, l, t) + (c_2 - c_1)e^{\lambda_{13}(l-r)} \varphi(r, l, t).$$

Якщо конвективна складова відсутня, тобто  $v=0$ , то  $\lambda_{13}=\lambda_{13}=0$ ,  $\lambda_{ir}^2 = (k\pi/b)^2$ , та

$$\varphi_0(a, b, t) = \frac{a}{b} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} e^{-\lambda_{ir}^2 t} \sin \frac{k\pi a}{b},$$

та

$$c_{z0} = c_1 + (c_3 - c_1)\varphi_0(l-r, l, t) + (c_2 - c_1)\varphi_0(r, l, t).$$

Із цих розв'язків легко отримати складову  $\Delta c$ , яка характеризує вплив конвективного руху на коефіцієнт дифузії:

$$\Delta c = c_z - c_{z0} = (c_3 - c_1) \left[ e^{\lambda_{13} r} \varphi(l-r, l, t) - \varphi_0(l-r, l, t) \right] + (c_2 - c_1) \left[ e^{\lambda_{13}(l-r)} \varphi(r, l, t) - \varphi_0(r, l, t) \right].$$

Апробацію отриманих результатів проводили в ході обчислювального експерименту за різних значень вхідних параметрів. Конвективну швидкість руху газу в пласті підземного сховища розрахову вали за формулою (3), а коефіцієнт дифузії – за поданими вище формулами. Результати обчислень подано у вигляді таблиць та рис. (2–4) за таких значень параметрів:  $l=40$  м,  $D=0,05$  см<sup>2</sup>/с,  $c(r, 0)=0,06$ ,  $c(0, t)=0,6$ ,  $c(l, t)=0,9$ .

Результати, подані на рис. 5 та 6, відповідають таким значенням параметрів:  $l=32$  м,  $D=0,05$  см<sup>2</sup>/с,  $c(r, 0)=0,9$ ,  $c(0, t)=0,9$ ,  $c(l, t)=0$ .

Таблиця 2

Значення коефіцієнта дифузії для різних значень часів  $t$  та координати  $r$  при  $v=0,005$  м/с та  $T=400$  К

$t/r$	0	8	16	24	32	40
0		0,3429	0,4466	0,5288	0,5906	
100		0,4211	0,4618	0,5440	0,6663	
200	0,5	0,4559	0,4781	0,5601	0,7000	0,9
300		0,4762	0,4987	0,5804	0,7196	
400		0,4909	0,5185	0,6001	0,7338	

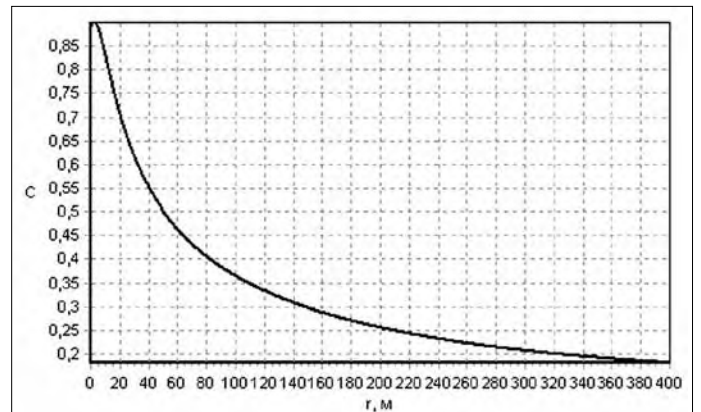


Рис. 5. Залежність коефіцієнта дифузії  $c_z$  від часу  $t$  на віддалі  $r=32$  м для  $v=0$

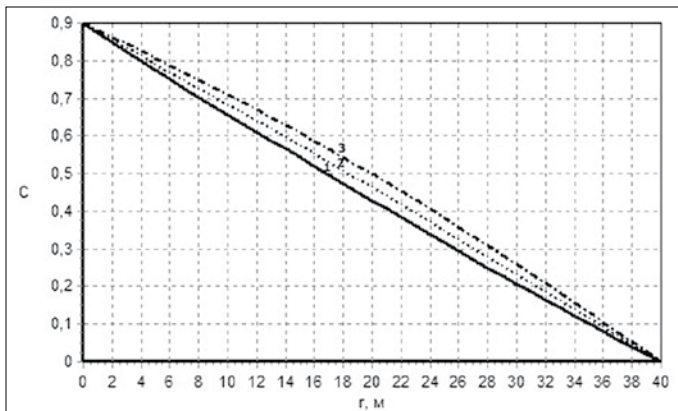


Рис. 6. Залежність коефіцієнта дифузії  $c_2$  від віддалі для часу  $t=400$  с та різних значень конвективної швидкості  $u=\{0,004; 0,002; 0\}$  м/с, де крива 1 відповідає швидкості  $u=0,004$  м/с, крива 2 –  $u=0,002$  м/с, крива 3 –  $u=0$  м/с

### Висновок

Отже, аналіз отриманих результатів показує, що конвективна складова має значний вплив на процес дифузії газів. Незважаючи на те, що швидкість руху газу в пористих середовищах є невеликою, її зростання призводить до збільшення концентрації домішкової речовини.

### Список літератури

1. **Варгафтик Н.Б.** Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н.Б. Варгафтик. – М.: Наука, 1972. – 720 с.

2. **П'янило Я.Д.** Моделювання процесу заміщення газів у пористих середовищах / Я.Д. П'янило // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2011. – Вип. 9. – С. 181–189.

3. **П'янило Я.Д.** Числова модель розрахунку поля швидкостей руху газу в пластах підземних сховища на основі методу скінченних елементів / Я.Д. П'янило, Н.Б. Лопух, П.П. Галій // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. – 2011. – Вип. 14. – С. 24–29.

4. **П'янило Я.Д.** Проекційно-ітераційні методи розв'язування прямих та обернених задач переносу / Я.Д. П'янило. – Львів: Сплайн, 2011. – 248 с.

### Автори статті



#### П'янило Ярослав Данилович

Доктор технічних наук. Завідувач відділу Центру математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Основні напрями наукових досліджень – математичне моделювання, обчислювальна математика.

#### Вавричук

#### Петро Григорович

Аспірант Інституту прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України. Освіта за фахом – прикладна математика та інформатика. Основний напрям діяльності – обчислювальна математика, математичне моделювання.



## НОВИНИ

### США стають найбільшим у світі виробником вуглеводнів

За даними компанії PIRA Energy Group, у 2013 р. США вийдуть на перше місце у світі з постачання нафти на ринок. Під нафтою Компанія розуміє всі рідкі вуглеводні, включаючи газоконденсат. Сумарне постачання нафти очікується на рівні 1,92 млн  $m^3$  на добу, що робить цю країну найбільшим продуцентом нафти у світі.

PIRA передбачає, що позиція США як найбільшого виробника нафти збережеться протягом значного періоду часу, хоча прирости видобутку нафти зі сланцевих порід будуть у перспективі зменшуватися. За прогнозами, США випереджатимуть Саудівську Аравію та Росію з виробництва нафти принаймні до 2030 р.

Компанія прогнозує видобування нафти в США у 2013 р. на рівні 1,18 млн  $m^3$  на добу, що менше від Саудівської Аравії чи Росії приблизно на 0,48 млн  $m^3$  на добу. Але США мають також інші джерела та форми постачання нафти на ринок: рідкі вуглеводні з природного газу (NGL) – 390 тис.  $m^3$  на добу, біопаливо – близько 158 тис.  $m^3$  на добу, нафтопродукти, отримані за рахунок удосконалення процесів переробки нафти, – близько 206 тис.  $m^3$  на добу.

Зростанню загального виробництва нафти сприяє збільшення обсягів видобутку сланцевої нафти. Виробництво сланцевої нафти і конденсату в 2013 р. очікується на рівні 400 тис.  $m^3$  на добу, що децю більше від третини загальної американської продукції. Виробництво рідких вуглеводнів зі сланцевого газу на рівні 190 тис.  $m^3$  становитиме майже половину від сумарної продукції випуску NGL.

У 2013 р. порівняно з 2012 р. видобування сланцевої нафти збільшиться на 127 тис.  $m^3$ , виробництво NGL зі сланцевого газу – на 48 тис.  $m^3$  на добу.

<http://www.ogj.com/article/2013/10/pira-shale-production> 21.10.2013